

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - (P(A) - 2P(B))x - 2P(A)P(B)}{x^2 - P^2(A)}$ , όπου  $P(A)$ ,  $P(B)$

οι πιθανότητες των ενδεχομένων  $A$ ,  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ .

**1)** Αν  $x \neq \pm P(A)$  δείξτε ότι  $f(x) = \frac{x + 2P(B)}{x + P(A)}$  (7 μονάδες)

**2)** Αν η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $xx'$  στο σημείο με τετμημένη  $-\frac{1}{3}$  και τον άξονα  $yy'$  στο σημείο με τεταγμένη  $\frac{2}{3}$  τότε να δείξετε ότι  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{6}$  και αν επιπλέον η  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $(P(A \cap B), \frac{3}{4})$  να βρεθεί ο αριθμός  $P(A \cap B)$ . (7 μονάδες)

**3)** Για τις ανωτέρω τιμές των  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$  :

**i)** Να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο  $B$  (6 μονάδες)

**ii)** Να δειχθεί ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα δύο ενδεχόμενα είναι ίση με την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο  $A$  (5 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 2ο**

**A.** Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^2 - 4x + 1 = \frac{4}{(x-2)^2} \quad (12 \text{ μονάδες})$$

**B.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + 5ax - 6\beta = 0$  που έχει ρίζες  $\rho_1$  και  $\rho_2$  δύο διαδοχικούς άρτιους αριθμούς. Να αποδείξετε ότι ισχύει  $25\alpha^2 + 24\beta = 4$ . (13 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3ο**

**A.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + 2|a + \beta|x + (1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)$

**α)** Να δείξετε ότι  $f(0) \geq (\alpha + \beta)^2$  (4 μονάδες)

**β)** Να δείξετε ότι για τη διακρίνουσα  $\Delta$  ισχύει  $\Delta \leq 0$ . (4 μονάδες)

**γ)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ . (4 μονάδες)

**δ)** Αν  $\alpha, \beta$  αντίστροφοι αριθμοί να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει διπλή ρίζα  $x_0$  για την οποία ισχύει  $x_0 + |\alpha| + |\beta| = 0$ . (4 μονάδες)

**B.** Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση:

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 \quad (9 \text{ μονάδες})$$

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  με  $\hat{B} < 90^\circ$  και  $ΑΒ < ΒΓ$ . Έστω  $Ε$  και  $Ζ$  σημεία του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $ΑΒΓ$  τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία αυτά να διέρχονται από το  $Δ$ . Αν  $Ε\hat{A} = Ζ\hat{A}$ .

- α)** Να δείξετε ότι η  $ΔΟ$  διχοτομεί την γωνία  $Α\hat{A}Γ$  (7 μονάδες)  
**β)** Να βρείτε το μέτρο της γωνίας  $Α\hat{B}Γ$ . (18 μονάδες)

