

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_0, y_0)$ του επιπέδου, του οποίου οι συντεταγμένες ικανοποιούν τη σχέση $(x^2 + x + 1) \cdot (3y^2 + 2y + 3) = 2$

Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το $M(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στην διχοτόμο 2ου και 4ου τεταρτημορίου. (25 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 4^x \cdot 25^y = 100 \\ 2^{\frac{1}{x}} \cdot 5^{\frac{1}{y}} = 10 \end{cases} \quad (12 \text{ μονάδες})$$

$$\beta) \begin{cases} 4x^2 + x - y - y^2 = 3 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} \quad (13 \text{ μονάδες})$$

ΘΕΜΑ 3ο

A. Να λυθεί η εξίσωση:

$$9^x + 1 = 2 \cdot 3^x \text{ συν} x \quad (12 \text{ μονάδες})$$

B. Να λυθεί, για τις τιμές για τις οποίες είναι καλώς ορισμένη, η εξίσωση:

$$4x^2 + 12x\sqrt{1+x} - 27 = 27x \quad (13 \text{ μονάδες})$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και σημείο P εκτός αυτού. Από το P φέρνουμε την εφαπτομένη PG προς τον κύκλο και την τέμνουσα PAB , έτσι ώστε τα σημεία A, G, B να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της PO . Αν $\Gamma\Delta$ κάθετη στην PO να δείξετε ότι :

- A)** Το ΔDOB είναι εγγράψιμο (12 μονάδες)
B) Η $\Delta\Gamma$ διχοτομεί την γωνία ΔDB . (13 μονάδες)

