ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Αν α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί με α> β και επιπλέον ισχύει $\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{4}$ να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων :

Α) $A=\frac{\alpha}{\beta}$ (12 μονάδες)

Β) $B=\frac{\left|\alpha^2-\beta^2\right|}{\alpha^2+\beta^2}$ (13 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Α) Δίνεται η εξίσωση $2\alpha x^2+\beta x+3\gamma=0 \quad (\alpha\neq 0)$

Αν οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 και ικανοποιούν τη σχέση $2\rho_1+3\rho_2=4$ να δείξετε ότι ισχύει

$(4\alpha+\beta)\cdot(8\alpha+3\beta)=-3\alpha\gamma$ (12 μονάδες)

Β) Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+2\beta x+3\gamma=0 \quad (\alpha,\gamma\neq 0)$ και $\alpha\neq 2\beta\neq 3\gamma\neq\alpha$.

Αν $|\alpha|+|3\gamma|<|2\beta|$ να δείξετε ότι η εξίσωση έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες.

(13 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Α) Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα :

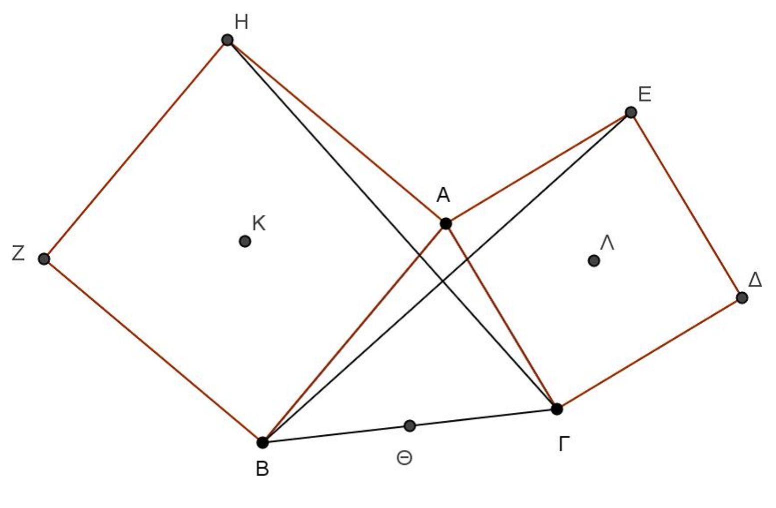
$$\frac{9x^2+3x+1}{x}-\frac{27x}{9x^2+3x+1}\geq 6$$

Για ποιες τιμές του x, ισχύει η ισότητα; (12 μονάδες)

Β) Αν ισχύει η ισότητα $A=\left(2^{x^2-2x+2}+7\right)\cdot\left(3^{y^2-6y+11}+2\right)=99$ να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x και ψ. (13 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΓΔΕ και ΑΒΖΗ. Έστω Θ το μέσο της ΒΓ και Κ,Λ τα κέντρα των τετραγώνων ΑΒΖΗ και ΑΓΔΕ αντίστοιχα.



Α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΗ είναι ίσα. (8 μονάδες)

Β) Να δείξετε ότι ΘΚ = ΘΛ και $ΘΚ\perp ΘΛ$. (17 μονάδες)