

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A) Να λυθεί στο \mathbb{R} η εξίσωση:

$$x(x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+5) + x^2 + 5x = 8 \quad (12 \text{ μονάδες})$$

B) Να λυθεί στο \mathbb{R} το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 6(x-3)(y+2) \\ \frac{3}{x-3} - \frac{4}{y+2} = 11 \end{cases} \quad (13 \text{ μονάδες})$$

ΘΕΜΑ 2ο

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $a^{\log_{\gamma} \frac{\beta}{\gamma}} \cdot \beta^{\log_{\alpha} \frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \gamma^{\log_{\beta} \frac{\alpha}{\beta}} = 1$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ (8 μονάδες)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $x^{\log_{\frac{2}{3}} x} \cdot 3^{\log_{\frac{x}{2}} 3} = 8$ (8 μονάδες)

γ) Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 2^{\frac{\ln x}{y}} \cdot x^{\frac{\ln y}{2}} = y^{-2} \\ x^{\frac{\ln y}{2}} \cdot y^{\frac{\ln x}{x}} = 4^{-1} \end{cases} \quad (9 \text{ μονάδες})$$

ΘΕΜΑ 3ο

A) Να λυθεί στο \mathbb{R} η εξίσωση:

$$\sqrt{2^x + 2^{-x}} = \sqrt{2} \cdot \text{συν}(e^x - 1) \quad (10 \text{ μονάδες})$$

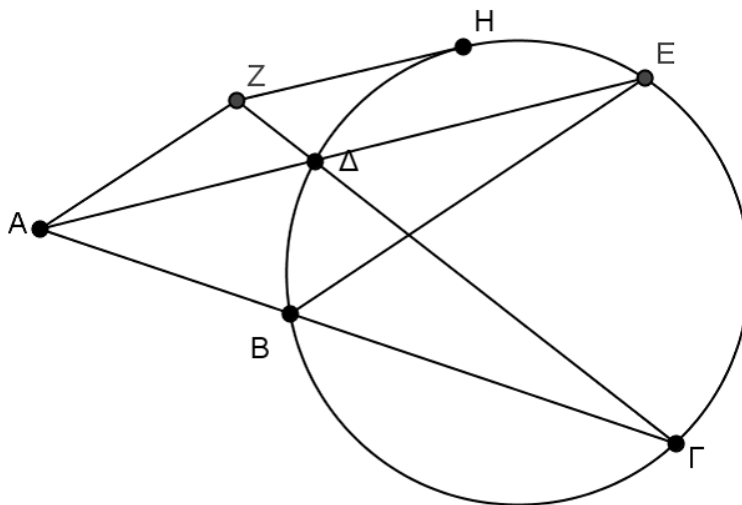
B) Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 134 \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 126 \end{cases} \quad (15 \text{ μονάδες})$$

ΘΕΜΑ 4ο

A) Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με \hat{A} ορθή και το σημείο $A(3,1)$. Αν οι κορυφές B και Γ είναι σημεία των ευθειών $\varepsilon_1: 3x-4y=0$ και $\varepsilon_2: 4x+3y=0$ αντίστοιχα να δειχθεί ότι για το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $(AB\Gamma) \geq \frac{3}{2}$. (10 μονάδες)

B) Από σημείο A εκτός κύκλου φέρνουμε τις τέμνουσες $AB\Gamma$ και ADE . Η παράλληλη από το A προς την BE τέμνει την ευθεία $\Gamma\Delta$ στο Z . Από το Z φέρνουμε την εφαπτομένη ZH προς τον κύκλο.



Να δεχθεί ότι: **α)** οι γωνίες $Z\Delta\Delta$ και $Z\Gamma A$ είναι ίσες **β)** $ZA=ZH$. (15 μονάδες)