

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΥΛΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  για τους οποίους ισχύει:  $(\alpha - 3)^2 + (\beta - 4)^2 = 4$

α) Να δείξετε ότι ισχύουν  $1 \leq \alpha \leq 5$  και  $2 \leq \beta \leq 6$

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή των παραστάσεων

i)  $A = 2\alpha + 3\beta$

ii)  $B = \beta - \alpha$

iii)  $\Gamma = \alpha \cdot \beta$

γ) Να βρείτε το πρόσημο του τριώνυμου  $f(x) = x^2 - 2x - 15$  για τις διάφορες τιμές και στη συνέχεια να δείξετε ότι  $(\beta - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha) - 15 \leq 0$

**ΘΕΜΑ Β**

Α Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{(5x-6)^2 + 2(10x-12) + 4}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

β) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες

γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$  και τέμνει τον άξονα  $yy'$  στο σημείο με τεταγμένη 1.

**B** Έστω η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  έχει 2 ρίζες  $x_1, x_2$  άνισες. Αν ισχύει  $|1 - S + P| < 1$  όπου  $S$  και  $P$  το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης να δείξετε ότι τουλάχιστον μία από τις ρίζες περιέχεται μεταξύ των αριθμών 0 και 2.

**ΘΕΜΑ Γ**

**A** α) Αν  $x$  θετικός ακέραιος, δείξτε ότι ισχύει:

$$2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$$

β) Δείξτε ότι:  $18 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} < 20$

**B** Αν ισχύουν  $\alpha + \beta + \delta = 0$  και  $x + y + z = 0$  να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$A = \alpha^2\gamma z + \beta^2z\chi + \delta^2\gamma\chi$$

#### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται κύκλος  $(O,R)$  και σημείο του  $A$ . Με διάμετρο την  $OA$  γράφουμε κύκλο και έστω  $K$  το κέντρο του. Από σημείο  $B$  του  $(O,R)$  φέρουμε εφαπτομένη  $B\Gamma$  του κύκλου που έχει κέντρο το  $K$  η οποία είναι παράλληλη στην  $OA$ . Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $BO\Gamma$ .

