

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
 (ύλη Β' Λυκείου)

**ΘΕΜΑ Α**

**A** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $x, y$  που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$2019^{x^2+y^2-8x+4y+20} = \text{συν}[\pi(x+y)]$$

**B** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{(\lambda-2)x^2+(\lambda-2)x+1}}$

Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η  $f$  να έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$

(25 μονάδες)

**ΘΕΜΑ Β**

Αν  $O$  είναι το περίκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$  με μήκη πλευρών  $AB = 8$  και  $A\Gamma = 10$  να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{OA} \cdot \vec{B\Gamma}$ .

(25 μονάδες)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται συνάρτηση  $f(x) = \frac{\log x + 1}{\log x - 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$

β) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) \geq 2$

γ) Να δείξετε ότι  $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$  για τις επιτρεπόμενες τιμές του  $x$

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $2f^2(x) - f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f^2\left(\frac{1}{x}\right) = 6$

ε) Αν  $\alpha = f\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi}{5}\right) \cdot f\left(\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{10}\right)$ , να λύσετε την εξίσωση:  $27^x - 9^{x+\alpha} + 33 \cdot 3^{x-\alpha} + 21 = 0$

(25 μονάδες)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $I$  το σημείο τομής των διχοτόμων. Από το  $I$  φέρνουμε παράλληλη προς την  $A\Gamma$  η

οποία τέμνει την  $AB$  στο  $M$  και την  $B\Gamma$  στο  $N$ . Να δείξετε ότι  $MN = \frac{\beta(\alpha + \gamma)}{\alpha + \beta + \gamma}$

(25 μονάδες)

