

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
(ύλη Α' Λυκείου)**ΘΕΜΑ Α**

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $(\alpha - 3)^2 + (\beta - 4)^2 = 4$

α) Να δείξετε ότι ισχύουν $1 \leq \alpha \leq 5$ και $2 \leq \beta \leq 6$

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή των παραστάσεων

i) $A = 2\alpha + 3\beta$

ii) $B = \beta - \alpha$

iii) $\Gamma = \alpha \cdot \beta$

γ) Να βρείτε το πρόσημο του τριώνυμου $f(x) = x^2 - 2x - 15$ για τις διάφορες τιμές και στη συνέχεια να δείξετε ότι $(\beta - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha) - 15 \leq 0$

(25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

A Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(5x-6)^2 + 2(10x-12) + 4}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

β) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες

γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y'$ στο σημείο με τεταγμένη 1.

B Έστω η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει 2 ρίζες x_1, x_2 άνισες. Αν ισχύει $|1 - S + P| < 1$ όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης να δείξετε ότι τουλάχιστον μία από τις ρίζες περιέχεται μεταξύ των αριθμών 0 και 2.

(25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

A α) Αν x θετικός ακέραιος, δείξτε ότι ισχύει:

$$2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$$

β) Δείξτε ότι: $18 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} < 20$

B Αν ισχύουν $\alpha + \beta + \delta = 0$ και $x + y + z = 0$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$A = \alpha^2 \gamma z + \beta^2 z x + \delta^2 \gamma x$$

(25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (O,R) και σημείο του A . Με διάμετρο την OA γράφουμε κύκλο και έστω K το κέντρο του. Από σημείο B του (O,R) φέρουμε εφαπτομένη $BΓ$ του κύκλου που έχει κέντρο το K η οποία είναι παράλληλη στην OA . Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{BOΓ}$.

(25 μονάδες)

