

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
 (ύλη Β' Λυκείου)

ΘΕΜΑ Α

A Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$2019^{x^2+y^2-8x+4y+20} = \text{συν}[\pi(x+y)]$$

B Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{(\lambda-2)x^2+(\lambda-2)x+1}}$

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η f να έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R}

(25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Αν O είναι το περίκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών $AB = 8$ και $A\Gamma = 10$ να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{OA} \cdot \vec{B\Gamma}$.

(25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{\log x + 1}{\log x - 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 2$

γ) Να δείξετε ότι $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ για τις επιτρεπόμενες τιμές του x

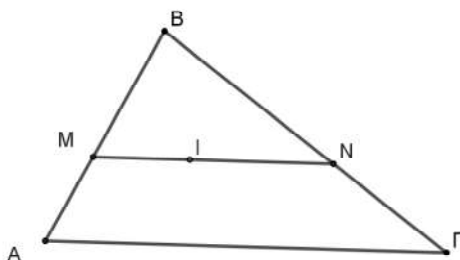
δ) Να λύσετε την εξίσωση $2f^2(x) - f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f^2\left(\frac{1}{x}\right) = 6$

ε) Αν $\alpha = f\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi}{5}\right) \cdot f\left(\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{10}\right)$, να λύσετε την εξίσωση: $27^x - 9^{x+\alpha} + 33 \cdot 3^{x-\alpha} + 21 = 0$

(25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και I το σημείο τομής των διχοτόμων. Από το I φέρνουμε παράλληλη προς την $A\Gamma$ η οποία τέμνει την AB στο M και την $B\Gamma$ στο N . Να δείξετε ότι $MN = \frac{\beta(\alpha + \gamma)}{\alpha + \beta + \gamma}$.



(25 μονάδες)