

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
(ύλη Α' Λυκείου)**ΘΕΜΑ Α**

Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

α) Η εξίσωση $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς α και β .

β) Στο τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ και Δ η διακρίνουσά του ισχύει ότι, αν $\Delta = 0$ και $\alpha < 0$, τότε $ax^2 + \beta x + \gamma < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Στην αριθμητική πρόοδο 5, 2, -1, ... ο αριθμός -52 είναι ο 20^{ος} όρος.

δ) Η ακολουθία $a_n = 3n - 5$ είναι αριθμητική πρόοδος.

ε) Ισχύει ότι $|a| > 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

στ) Ισχύει $3^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3^5}$.

ζ) Ισχύει ότι για $\nu \in \mathbb{N}^*$, αν $\alpha \cdot \beta > 0$, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$.

η) Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, αν έχει διακρινουσα $\Delta = 0$, έχει μια ρίζα διπλή την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

θ) Αν μια ευθεία (ϵ) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ η κλίση της είναι 0.

ι) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = 4$ είναι το ίδιο με της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

(10 x 2 μονάδες = 20 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

A. Έστω $\alpha \in (1, +\infty)$. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2 - (\alpha^2 + 1)x + \alpha$ και

$$g(x) = x^2 - (\alpha^3 + 1)x + \alpha^3.$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και της $g(x) = 0$.

β) Να τοποθετήσετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο όλες τις ρίζες των δύο παραπάνω εξισώσεων.

γ) Να βρείτε το πρόσημο που δίνει το γινόμενο των τιμών $\Pi = g\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot g(\alpha) \cdot f(1) \cdot f(\alpha^3)$.

(3 + 3 + 4 μονάδες)

B. α) Να δείξετε την ταυτότητα $4x^3 + [x(x-1)]^2 = x^2 \cdot (x+1)^2$.

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = \sqrt[3]{(1000 \cdot 2001)^2 - (1000 \cdot 1999)^2}$ είναι ακέραιος.

(5 + 5 μονάδες)

Γ. Έστω $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$. Αν $\alpha - \beta + \gamma = 2$ και $\alpha + \beta + \gamma = -3$, ποιο είναι το πλήθος των ριζών του τριωνύμου. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

A. Αν α, β, γ διαφορετικοί ανά δύο πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$(x - \alpha)(x - \beta)(\alpha - \beta) + (x - \beta)(x - \gamma)(\beta - \gamma) + (x - \gamma)(x - \alpha)(\alpha - \gamma) = 0$$

έχει δύο άνισες ρίζες στο \mathbb{R} .

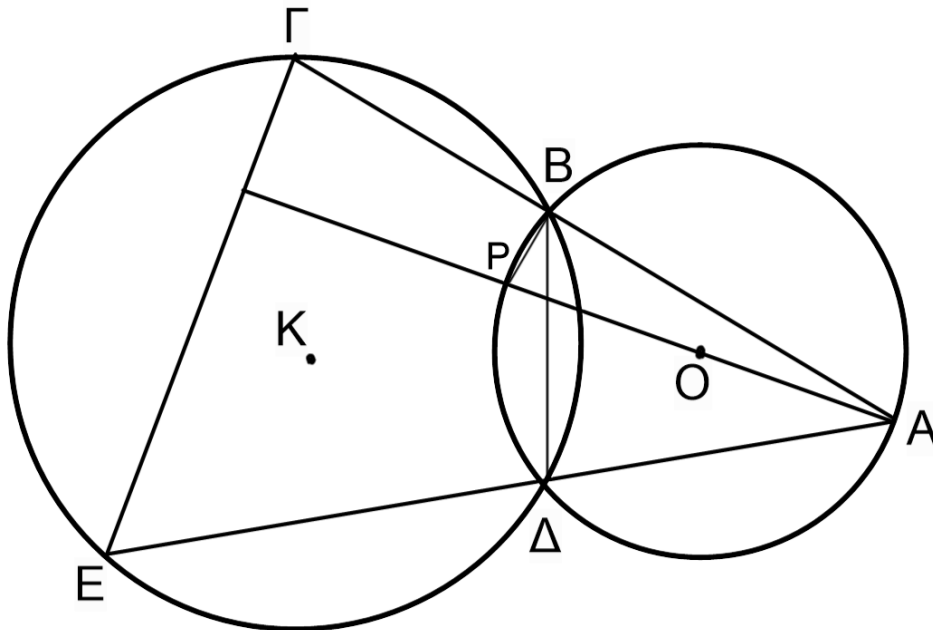
(15 μονάδες)

B. Αν οι εξισώσεις $-2x^2 + \beta x + \gamma = 0$ και $-x^2 + (\beta + 1)x + \gamma + 1 = 0$ έχουν ρίζες τις x_1, x_2 και x_1^2, x_2^2 , αντίστοιχα, να βρείτε τα β, γ .

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δύο κύκλοι (O, ρ) και (K, R) με $R > \rho$ τέμνονται στα σημεία Β και Δ. Από τυχαίο σημείο Α του κύκλου κέντρου Ο φέρνω την τέμνουσα ΑΒΓ και την τέμνουσα ΑΔΕ, όπου Γ και Ε είναι σημεία του κύκλου κέντρου Κ. Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΟ, η οποία τέμνει τον κύκλο (O, ρ) στο Ρ, είναι κάθετη στη ΓΕ.



(20 μονάδες)